Основы теории подобия

Мы пришли к выводу (см. предыдущую лекция), что для нахождения интенсивности переноса теплоты от стенки в ядро потока или от ядра к стенке нам придётся делать экспериментальную установку, т.е. **моделировать** процесс.

А что такое модель? Каким критериям она должна удовлетворять?

Различают **модели** математические и **физические**. Нас интересуют последние.

Принято считать, что модель – это что-то маленькое, очень похожее на «большое», т.е. на **натуру**.

Это не совсем так. Вернее, совсем не так.

При моделировании тепловых или каких-либо других процессов внешнее сходство совершенно не требуется.

А что тогда требуется? Какие условия при создании экспериментальной модели нужно соблюдать обязательно, а какие можно и не соблюдать?

Основные положения теории подобия

Подобными называются явления, для которых постоянны отношения характеризующих их сходственных величин.

Различают четыре вида подобия:

1. геометрическое подобие;
2. временно́е подобие (*гомохронность*);
3. подобие физических величин;
4. подобие начальных и граничных условий.

1. Геометрическое подобие соблюдается при равенстве отношений всех сходственных линейных размеров натуры и модели.

Это как две фотографии разного размера.

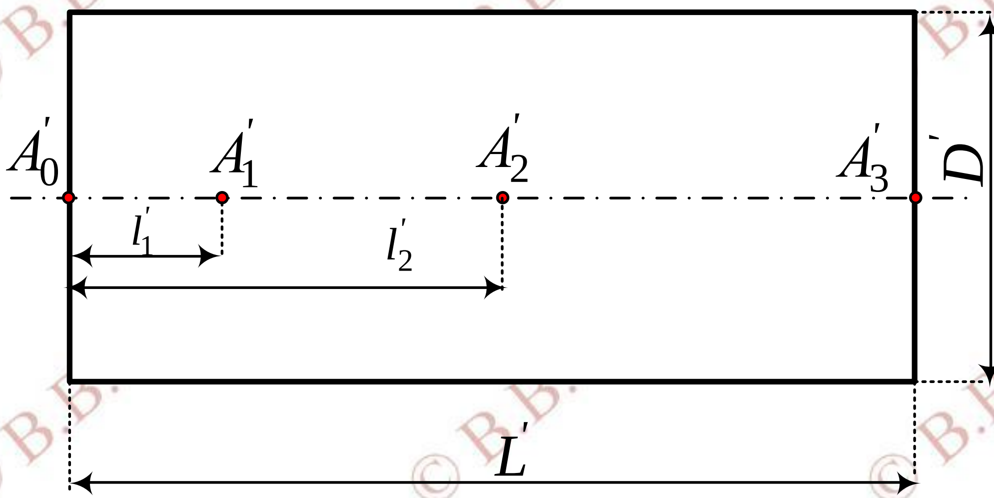
Рассмотрим два отрезка трубы. Один – это **натура**. Все величины, относящиеся к натуре, будем обозначать одним штрихом (').

Второй отрезок трубы - **модель**. Все величины, относящиеся к модели, будем обозначать двумя штрихами (").

Длина натуры *L*', а длина модели *L*".

Диаметры соответственно *D*' и *D*".

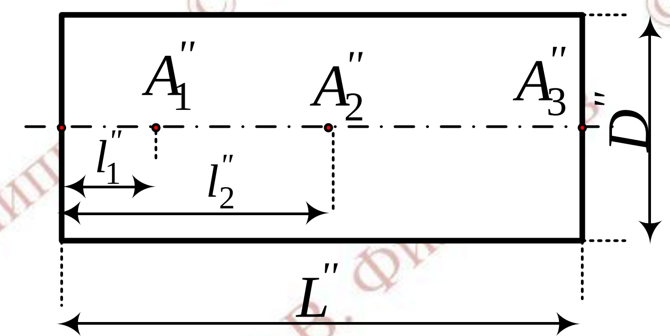
На осях этих труб возьмём по четыре точки, параметры которых указаны на рисунке



т. $A'_1(\rho'_1, \mu'_1, w'_1, \tau'_1)$

т. $A'_2(\rho'_2, \mu'_2, w'_2, \tau'_2)$

т. $A'_3(\rho'_3, \mu'_3, w'_3, \tau'_3)$



т. $A''_1(\rho''_1, \mu''_1, w''_1, \tau''_1)$

т. $A''_2(\rho''_2, \mu''_2, w''_2, \tau''_2)$

т. $A''_3(\rho''_3, \mu''_3, w''_3, \tau''_3)$

Так вот геометрическое подобие соблюдается при таком равенстве

$$\frac{L'}{L''} = \frac{D'}{D''} = \frac{l_1'}{l_1''} = \frac{l_2'}{l_2''} = ... = const = k_l$$

где k_l – **константа геометрического подобия**.

А можно для подобных фигур записать и такое условие

$$\frac{L'}{D'} = \frac{L''}{D''} = idem = i_l$$

т.е. отношение длины трубы к её диаметру у натуры и модели должно быть постоянным.

Такое отношение называется **инвариантом подобия**.

На примере самого простого геометрического подобия мы увидели, как это самое подобие можно охарактеризовать:

- с помощью константы подобия;
- с помощью инварианты подобия.

И константа, и инвариант – величины безразмерные. В этом их сходство.

Но есть и различие. При переходе от одного сечения к другому инвариант меняется, а константа подобия остаётся постоянной

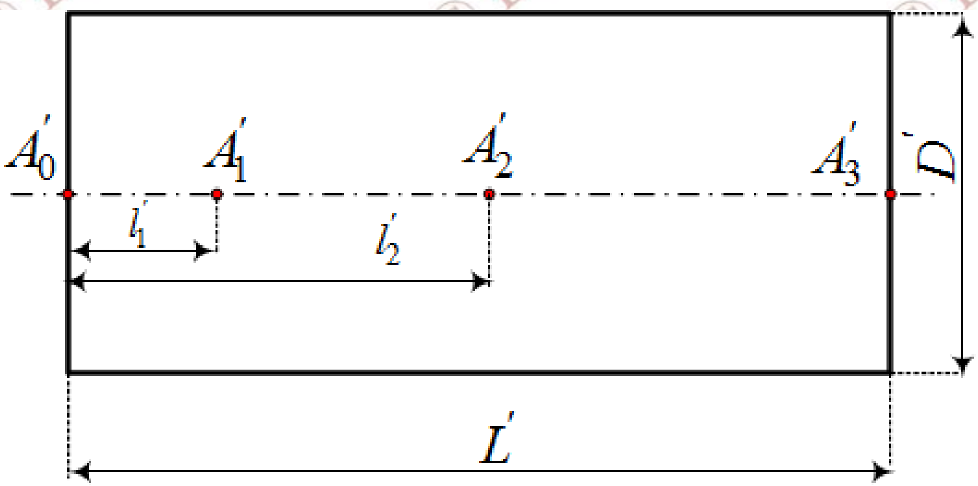
$$\frac{l_1^{'}}{L^{'}} \neq \frac{l_2^{'}}{L^{'}}$$

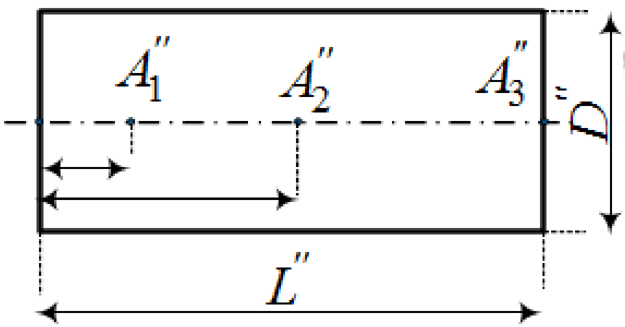
2. Временнóе подобие (гомохронность)

Временное подобие требует одинаковых отношений промежутков времени, за которые в натуру и модели совершаются одинаковые стадии процесса.

Временное подобие можно сравнить с периодами жизни человека и, например, кошки

Вернёмся к рисунку двух труб





т. $A_1'\left(\rho_1', \mu_1', w_1', \tau_1'\right)$

т. $A_2'\left(\rho_2', \mu_2', w_2', \tau_2'\right)$

т. $A_3'\left(\rho_3', \mu_3', w_3', \tau_3'\right)$

т. $A_1''\left(\rho_1'', \mu_1'', w_1'', \tau_1''\right)$

т. $A_2''\left(\rho_2'', \mu_2'', w_2'', \tau_2''\right)$

т. $A_3''\left(\rho_3'', \mu_3'', w_3'', \tau_3''\right)$

Если для наших труб соблюдается временное подобие, то можем записать константу подобия

$$\frac{\tau_1'}{\tau_1''} = \frac{\tau_2'}{\tau_2''} = \frac{\tau_3'}{\tau_3''} = \frac{T'}{T''} = \ldots\ldots = k_\tau$$

и инвариант подобия

$$\frac{\tau_1'}{\tau_2'} = \frac{\tau_1''}{\tau_2''} = i_\tau$$

При соблюдении геометрического и временного подобий будет соблюдаться и подобие скоростей

$$\frac{w_0'}{w_0''} = \frac{w_1'}{w_1''} = \frac{w_2'}{w_2''} = \frac{w_3'}{w_3''} = \ldots\ldots = k_w$$

$$\frac{w_1'}{w_2'} = \frac{w_1''}{w_2''} = i_w$$

А можно заменить сами величины их приращениями

$$k_w = \frac{w_1^{'}}{w_1^{''}} = \frac{w_2^{'}}{w_2^{''}} = \frac{w_1^{'} - w_2^{'}}{w_1^{''} - w_2^{''}} = \frac{\Delta w^{'}}{\Delta w^{''}} = \frac{dw^{'}}{dw^{''}}$$

Это очень важный приём в теории подобия. Мы им будем пользоваться неоднократно.

3. Подобие физических величин – предполагает, что для двух сходственных точек натуры и модели отношения физических свойств являются величинами постоянными.

Другими словами, не хочу я проводить опыты, например, с горячей серной кислотой. Опасно это, да и вредно. Хочу работать с водой. Можно?

Можно, если будут выполняться условия

$$\frac{\rho_1'}{\rho_1''} = \frac{\rho_2'}{\rho_2''} = \frac{\rho_3'}{\rho_3''} = \ldots\ldots = k_\rho$$

$$\frac{\mu_1'}{\mu_1''} = \frac{\mu_2'}{\mu_2''} = \frac{\mu_3'}{\mu_3''} = \ldots\ldots = k_\mu$$

4. Подобие начальных и граничных условий предполагает, что отношения основных параметров в начале и в конце модели и натуры являются величинами постоянными.

Итак, мы выяснили, что подобие можно охарактеризовать с помощью констант и инвариантов подобия. Приведённые ранее инварианты подобия типа вот этого

$$\frac{L'}{D'} = \frac{L''}{D''} = idem = i_l$$

являются отношением двух однородных величин.

Такие инварианты называют симплексами. Особого смысла они не имеют.

Однако инварианты подобия можно составить и из разнородных величин

$$\frac{w^{'}\rho^{'}d^{'}}{\mu^{'}} = \frac{w^{''}\rho^{''}d^{''}}{\mu^{''}} = idem = Re$$

А это наш старый знакомы – критерий Рейнольдса.

Так вот критерии всегда являются отношением двух каких-то сил, т.е. имеют важный смысл

$$Re = \frac{\text{сила инерции}}{\text{сила вязкости}}$$

Три теоремы подобия

1-я теорема.

Подобные явления характеризуются численно равными критериями подобия.

1-я теорема указывает, какие величины нужно измерять в ходе экспериментов: те, которые входят в критерии подобия.

2-я теорема.

Решение любого дифференциального уравнения можно представить в виде зависимости между критериями подобия.

3-я теорема.

Подобны те явления, которые описываются одной системой дифференциальных уравнений и у которых соблюдается подобие условий **однозначности**.

А что такое условия **однозначности**?

Условия однозначности – это частные условия, которые выделяют данное явление из числа ему подобных. Например, для движения потока это плотность, вязкость, диаметр, скорость.

Можно сказать, что условия однозначности – это те параметры, которые нам известны.

Этапы применения теории подобия

1. **Необходимо получить полное математическое описание интересующего нас объекта.** Обычно это дифференциальное уравнение.

2. Проводим преобразование этого дифференциального уравнения путём формирования из него критериев подобия.

Эти критерии будут отличаться: в один из них входит неизвестная нам величина.

Этот один критерий называют **определяемым**.

Если мы говорим о теплоотдаче, то в определяемый критерий будет входить неизвестный нам коэффициент теплоотдачи α.

А остальные критерии составлены из величин, которые мы знаем. Их называют **определяющими**.

$$\boxed{\text{Определяемый критерий} = f\left(\text{определящие критерии}\right)}$$

Этап 3. Приступаем к опытам на моделях. В ходе этих опытов измеряем величины, входящие в критерии подобия. Получаем массив экспериментальных данных.

Этап 4. Проводим математическую обработку полученный экспериментальных данных с целью выявления зависимости между определяемым и определяющими критериями.

В результате получается **критериальное уравнение**.

Оно публикуется в специальной литературе и используется в технологических расчётах.

End.