Тепловое подобие.
Критерии теплового подобия.

Напомню путь, по которому мы идём.

Наша цель – научиться рассчитывать коэффициенты теплоотдачи от ядра потока к стенке и от стенки в ядро α. Ранее мы установили, что, к большому сожалению, эти коэффициенты зависят от большого числа переменных

$$\alpha = f(w, c, \rho, \mu, \lambda, d, a....)$$

Если переменных слишком много, на помощь приходит теория подобия. Она позволяет из этих переменных сформировать критерии подобия (комплексы переменных!). В один из этих критериев будет входить интересующая нас величина, в данном случае **коэффициент теплоотдачи α**. Такой критерий называется **определяемым**. Другие – определяющие.

Ранее мы установили этапы применения теории подобия. Первый этап заключался **в получении математического описания интересующего нас объекта**. Т.е. надо выяснить, а какие переменный влияют на процесс?

Обычно этот этап давным-давно сделан – все процессы и явления описаны в форме дифференциальных уравнений.

Дифференциально уравнение конвективного теплообмена

Цель – получить математическое описание в форме дифференциального уравнения совместного переноса теплоты конвекций и теплопроводностью.

Для его вывода в потоке выберается элементарный прямоугольный параллелепипед объёмом dV с рёбрами dx, dy и dz, параллельными координатным осям. Составляется тепловой баланс этого параллелепипеда, считая, что теплота через него передаётся конвекцией и теплопроводностью.

После преобразований получим

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{\partial t}{\partial x}w_x+\frac{\partial t}{\partial y}w_y+\frac{\partial t}{\partial z}w_z=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right).$$

Это дифференциальное уравнение конвективного теплообмена или уравнение Фурье-Кирхгофа.

Оно учитывает вклад времени, конвекции и теплопроводности в распределение температуры в движущемся потоке.

Первый этап применения теории подобия выполнен!

Критерии теплового подобия

Теперь на очереди второй этап – нужно сформировать критерии подобия.

В первую очередь нас интересует прохождение теплоты через пограничный слой, где «работает» только теплопроводность.

А раз теплопроводность, то можем записать закон теплопроводности Фурье

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dn} F$$

С другой стороны, для теплоотдачи справедливо уравнение закона охлаждения Ньютона

$$Q = \alpha\left(t_{ж} - t_{ст}\right)F.$$

Равны левый части, значит равны и правые

$$-\lambda \frac{dt}{dn} F = \alpha\left(t_{ж} - t_{cm}\right) F$$

А теперь начинаем подобное преобразование этого уравнения: отбрасываем знаки математических операторов и дели одну часть уравнения на другую.

Получим

$$\boxed{\frac{\alpha l}{\lambda} \equiv Nu}$$

где l – определяющий геометрический размер, для трубы это диаметр d, λ – коэффициент теплопроводности жидкости.

Это первый критерий теплового подобия.

Nu - критерий Нуссельта, безразмерная величина, характеризующая интенсивность конвективного теплообмена между поверхностью тела и потоком газа или жидкости.

Назван в честь немецкого инженера Вильгельма Нуссельта (25.11.1882 – 01.09.1957)

Вильгельм Нуссельт в 1915 году опубликовал свою новаторскую работу: основные законы переноса тепла. В ней он впервые предложил безразмерные группы, теперь известные как основные параметры в теории подобия теплообмена.

Так как в критерий Нуссельта неизвестный нам коэффициент теплоотдачи α, то этот критерий является определяемым.

Теперь надо найти определяющие критерии.

Для этого рассмотрим перенос теплоты в турбулентном потоке и преобразуем уравнение Фурье-Кирхгофа

Вклад конвекции

$$\frac{\partial t}{\partial x} w_x + \frac{\partial t}{\partial y} w_y + \frac{\partial t}{\partial z} w_z \sim \frac{t}{l} w$$

Вклад теплопроводности

$$a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \sim \frac{at}{l^2}$$

Влияние времени $\dfrac{\partial t}{\partial \tau} \sim \dfrac{t}{\tau}$

А теперь будем искать соотношения этих трёх вкладов на процесс теплоотдачи.

Найдём соотношение вкладов теплопроводности и времени

$$\frac{at}{l^2} \div \frac{t}{\tau} = \frac{a\tau}{l^2} \equiv Fo$$

Fo – критерий Фурье, учитывает вклад времени в распределение температуры. Применяется только для неустановившихся процессов

Теперь найдём соотношения вкладов конвекции и теплопроводности

$$\frac{t}{l}w \div \frac{at}{l^2} = \frac{wl}{a} \equiv Pe$$

Pe – критерий Пекле, является мерой соотношения конвекции (в числителе скорость потока *w*) и теплопроводности (в знаменателе коэффициент температуропроводности *a*)

Этот критерий для расчётов неудобен. Его преобразуют в два других критерия

$$\frac{wl}{a}\cdot\frac{\nu}{\nu}=\frac{wl}{\nu}\cdot\frac{\nu}{a}=Re\cdot Pr$$

Появился наш старый знакомый – критерий Рейнольдса. А в самом деле – куда без него? Ведь на теплоотдачу сильно влияет турбулентность!

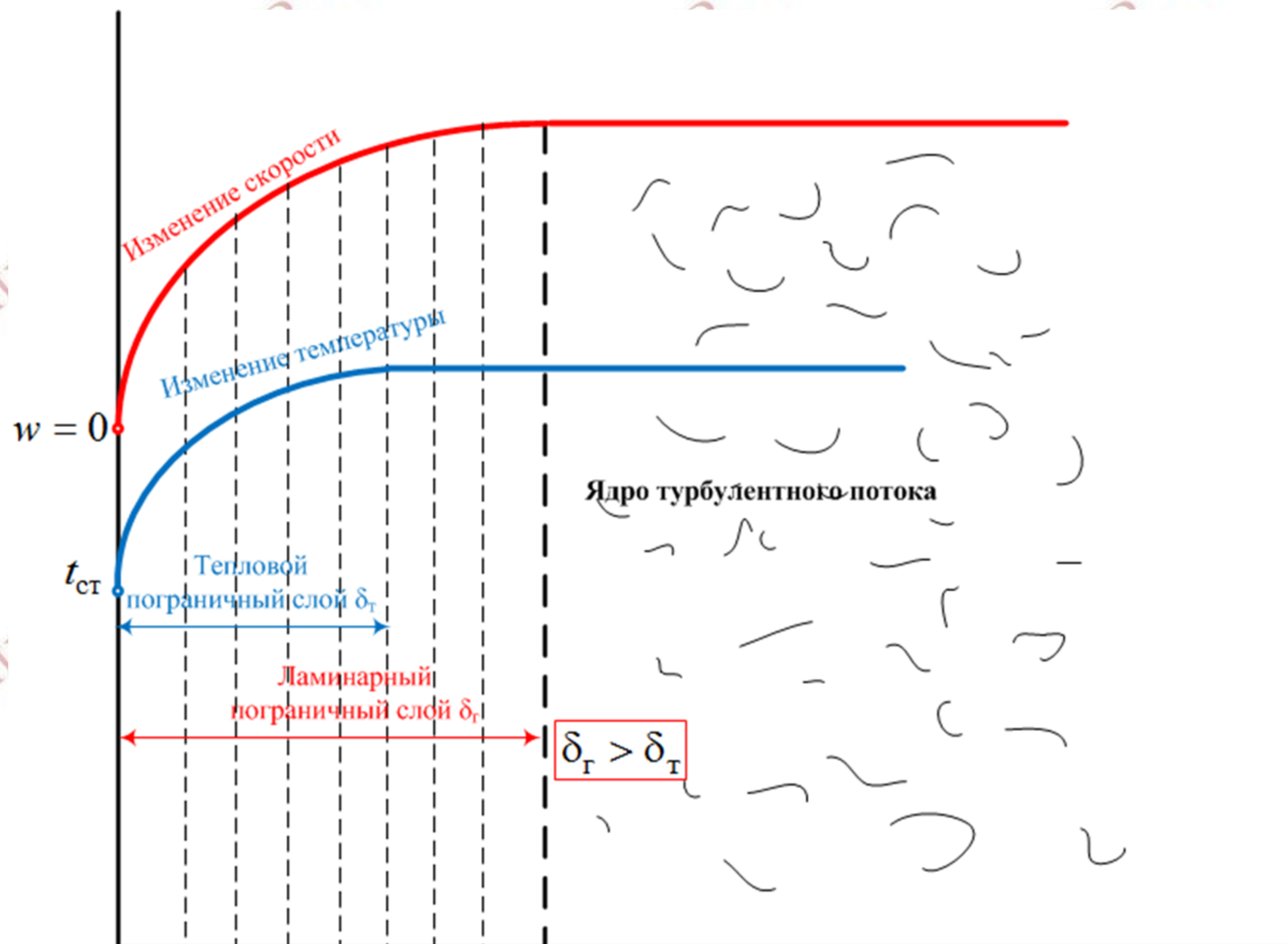
И ещё появился новый критерий – критерий Прандтля

$$\boxed{\frac{\nu}{a} \equiv Pr}$$

Он назван в честь немецкого учёного Людвига Прандтля, который внёс существенный вклад в основы гидродинамики и разработал теорию пограничного слоя.

Людвиг Прандтль (Ludwig Prandtl), 1875-1953

Вспомним механизм передачи теплоты в потоке



Можно утверждать, что критерий Прантля является мерой соотношения толщин гидродинамического ламинарного и теплового слоёв

$$Pr = \frac{\nu}{a} \sim \frac{\delta_{\text{г}}}{\delta_{\text{т}}}$$

Для расчётов удобнее записать критерий Прандтля иначе

$$Pr \equiv \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c \rho}{\rho \lambda} = \frac{c\mu}{\lambda}$$

И окончательно получаем

$$\boxed{Pr \equiv \frac{c\mu}{\lambda}}$$

Все три величины – свойства вещества, приведённые в справочнике. Их найти - элементарно!

С ростом температуры вязкость жидкостей уменьшается. Следовательно, число Прандтля тоже уменьшается. Например, для воды при 0°С критерий Прандтля равен 13,5, а при 100° - 1,7. Для газов критерий Прандтля вообще равен 1.

Критерии Рейнольдса и Прандтля – **определяющие критерий**.

Согласно второй теореме подобия решение любого дифференциального уравнения может быть представлено в виде зависимости между критериями подобия.

Этой зависимости принято придавать степенной вид. Так критерий Нуссельта является определяемым, то мы можем записать

$$Nu = A\,Re^{m}\,Pr^{n}\left(\frac{l}{d}\right)^{k},$$

$\frac{l}{d}$ - симплекс геометрического подобия, учитывает геометрию потока

Т.е., зная критерии Рейнольдса и Прандтля, а также геометрические размеры аппарата, мы можем найти значение критерия Нуссельта. А из него – коэффициент теплоотдачи

$$\boxed{\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{d}}$$

Только вот откуда взять коэффициенты A, m,n и k в уравнении

$$Nu = A\,Re^{m}\,Pr^{n}\left(\frac{l}{d}\right)^{k}?$$

Они-то и появляются в результате проведения большого числа экспериментов и последующей обработки полученных результатов. Т.е. начинается его величество **эксперимент**.

End.